Єдиний державний іспит з МАТЕМАТИКИ

Демонстраційний варіант контрольних вимірювальних матеріалів для проведення у 2027 році єдиного державного іспиту з МАТЕМАТИКИ

Пояснення до демонстраційного варіанту контрольних вимірювальних матеріалів для ЄДІ з математики 2027 року

Демонстраційний варіант призначений для того, щоб дати уявлення про структуру майбутніх контрольних вимірювальних матеріалів, кількості завдань, їх формі і рівні складності.

Завдання демонстраційного варіанту не відображають всіх питань змісту, які можуть бути включені в контрольні вимірювальні матеріали в 2027 році. Структура роботи приведена в специфікації, а повний перелік питань – в кодифікаторах елементів змісту та вимог до рівня підготовки випускників закладів освіти для проведення єдиного державного іспиту 2027 р. з математики.

Екзаменаційна робота складається з двох частин, які відрізняються за змістом, складністю і кількістю завдань. Визначальною ознакою кожної частини роботи є форма завдань:

- частина 1 містить 12 завдань (завдання 1-12) з короткою відповіддю;
- частина 2 містить 4 завдання (завдання 13-16) з короткою відповіддю і п'ять завдань (завдання 17-21) з розгорнутою відповіддю.

За рівнем складності завдання розподіляються наступним чином: завдання 1-12 мають базовий рівень, завдання 13-20 – підвищений рівень, завдання 21 відносяться до високого рівня складності.

Завдання з короткою відповіддю (1-16) вважається виконаним, якщо в бланку відповідей № 1 зафіксовано вірну відповідь у вигляді цілого числа або кінцевого десяткового дробу.

Правильне розв'язання кожного з завдань 1-16 оцінюється одним балом.

Правильне розв'язання кожного з завдань 17-19 оцінюється – 2 балами; завдання 20 – 3 балами і 21 – 4 балами. Максимальний первинний бал за виконання всієї роботи – 29 балів.

Наведені критерії оцінювання дозволяють скласти уявлення про вимоги до повноти і правильності розв’язків. До кожного завдання з розгорнутою відповіддю, включеному в демонстраційний варіант, пропонується один з можливих розв'язків.

Демонстраційний варіант контрольних вимірювальних матеріалів, система оцінювання, специфікація і кодифікатори допоможуть виробити стратегію підготовки до ЄДІ з математики

Інструкція по виконанню роботи

Екзаменаційна робота складається з двох частин, що включають в себе 21 завдання.

Частина 1 містить 12 завдань базового рівня складності з короткою відповіддю.

Частина 2 містить 4 завдання підвищеного рівня складності з короткою відповіддю і 5 завдань підвищеного і високого рівня складності з розгорнутою відповіддю.

На виконання екзаменаційної роботи з математики відводиться 3 години 55 хвилин (235 хвилин).

Відповіді до завдань 1-16 записуються у вигляді цілого числа або кінцевого десяткового дробу.

Числа запишіть в поля відповідей в тексті роботи, а потім перенесіть в бланк відповідей № 1.

Відповідь: *–0,8* 

При виконанні завдань 17-21 потрібно записати повне розв'язання і відповідь у бланку відповідей № 2.

Всі бланки ЄДІ заповнюються яскравими чорними чорнилами. Допускається використання гелевої, капілярної або пір'яної ручок.

При виконанні завдань можна користуватися чернеткою. Записи в чернетці не враховуються при оцінюванні роботи.

Бали, отримані Вами за виконані завдання, підсумовуються. Намагайтеся виконати якомога більше завдань і набрати найбільшу кількість балів.

Бажаємо успіху!

Відповіддю до завдань 1-16 є ціле число або скінченний десятковий дріб. Відповідь слід записати в БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ № 1 праворуч від номера завдання, що виконується, починаючи з першої клітинки. Кожну цифру, знак мінус та кому пишіть в окремій клітинці відповідно за наведеними в бланку зразками. Одиниці вимірювань писати не потрібно.

Частина 1

1. <u>Найпростіші задачі.</u>

На автозаправці клієнт віддав касиру 1000 рублів та попросив залити бензин до повного бака. Ціна бензину 30 руб. 20 коп. Здачі клієнт отримав 63 руб. 80 коп. Скільки літрів бензину було залито у бак?

Розв'язок.

Оскільки здачу становить 63 руб. 80 коп., На бензин витрачено 936 руб. 20 коп. Розділимо 936,2 на 30,2

$$\frac{936,2}{30,2}=\frac{9362}{302}=31$$

Отже, у бак було залито 31 літр бензину.

Відповідь: 31

Для приготування маринаду для огірків на 1 л води потрібно 10 г лимонної кислоти. Лимонна кислота продається в пакетиках по 15 г. Яку найменшу кількість пачок потрібно купити господині для приготування 8 літрів маринаду?

Розв'язок.

Для приготування 8 літрів маринаду потрібно 10 ·8 = 80 г лимонної кислоти. Розділимо 80 на 15:

$$\frac{80}{15} = \frac{16}{3} = \frac{15+1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Отже, потрібно буде купити 6 пакетиків.

Відповідь: 6.

2. Задачі на відсотки.

Клієнт взяв у банку кредит 12 000 рублів на рік під 16%. Він повинен погашати кредит, вносячи в банк щомісяця однакову суму грошей, з тим, щоб через рік виплатити всю суму, взяту в кредит, разом з відсотками. Скільки рублів він повинен вносити в банк щомісяця?

Розв'язок.

Через рік клієнт повинен буде виплатити 12 000 + 0,16 12 000 = 13 920 рублів. Розділимо 13 920 руб. на 12 міс.:

$\frac{13\,920}{12} = 1160$ руб./міс.

Отже, клієнт повинен вносити щомісяця до банку 1160 рублів.

Відповідь: 1160.

або

Податок з доходів становить 13% від зарплати. Після утримання податку на доходи Марія Костянтинівна отримала 9570 рублів. Скільки рублів складає заробітна плата Марії Костянтинівни?

Розв'язок.

Нехай заробітна плата Марії Костянтинівни складає карбованців. Тоді

$x - 0,13x = 9570 \Leftrightarrow 0,87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0,87 \Leftrightarrow x = 11\,000.$

Отже, заробітна плата Марії Костянтинівни становить 11 000 рублів.

Відповідь: 11 000.

3. Читання графіків і діаграм.

На малюнку жирними точками показано курс китайського юаня, встановлений Центробанком РФ, у всі робочі дні з 23 вересня до 23 жовтня 2010 року. По горизонталі вказуються числа місяця, по вертикалі - вартість китайського юаня в рублях. Для наочності жирні крапки малюнку з'єднані лінією. Визначте найменший курс китайського юаня за вказаний



період. Відповідь дайте у рублях.

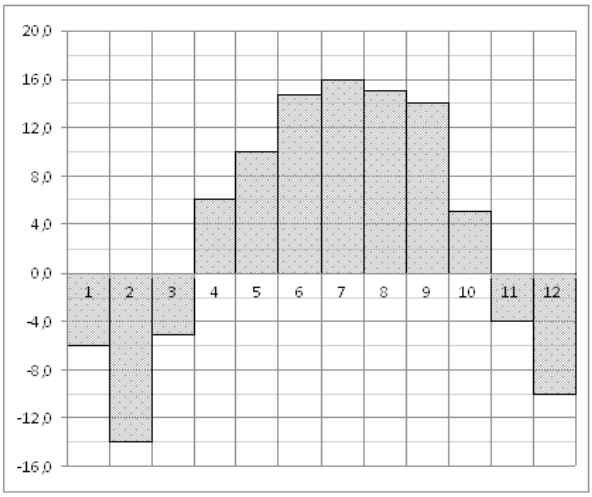
Розв'язок.

З малюнка видно, що найменший курс китайського юаня було встановлено 8 жовтня і становить 44,5.

Відповідь:44,3

або

На діаграмі показано середньомісячну температуру повітря у Нижньому Новгороді (Гіркому) за кожен місяць 1994 року. По горизонталі вказуються місяці, вертикалі — температура в градусах Цельсія. Визначте за діаграмою, скільки місяців, коли середньомісячна температура перевищувала 4 градуси Цельсія.



Розв'язок.

З діаграми видно, що було 7 місяців, коли середньомісячна температура перевищувала 4 градуси за Цельсієм (див. малюнок).

Відповідь: 7.

4. Робота з формулами.

Теорему косинусів можна записати у вигляді, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$ де a. b і c - сторони трикутника, а γ- кут між сторонами a і b. Користуючись цією формулою, знайдіть величину $\cos\gamma$ якщо a = 5, b = 8 і c = 7.

Розв'язок.

Підставимо дані величини a, b, c у формулу: $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$.Отримаємо:

$$\cos\gamma = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{25+64-49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Відповідь: 0,5

або

Середнє геометричне трьох чисел a, b і c обчислюється за формулою $g = \sqrt[3]{abc}$. Обчисліть середнє геометричне чисел 12, 18, 27.

Розв'язок.

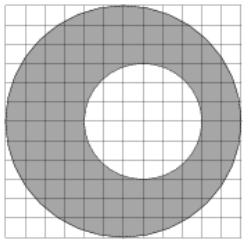
Підставимо значення у формулу і обчислимо:

$g = \sqrt[3]{12\cdot 18\cdot 27} = \sqrt[3]{4\cdot 3\cdot 2\cdot 9\cdot 9\cdot 3} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3^6} = 2\cdot 3^2 = 18.$

Відповідь: 18.

5. Квадратна решітка, координатна площина.

На папері на карті намальовано два кола. Площа внутрішнього кола дорівнює 1. Знайдіть площу заштохованої фігури.



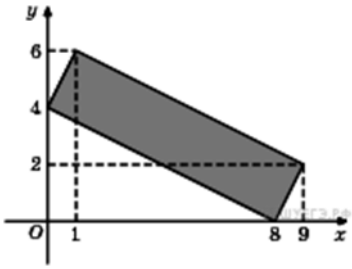
Розв'язок.

Площі кіл відносяться як квадрати їх радіусів. Радіус зовнішнього кола дорівнює 6, радіус внутрішнього дорівнює 3. Оскільки радіус більшого кола вдвічі більший за радіус найменшого кола, площа більшого кола вчетверо більша за площу меншого. Отже, вона дорівнює 4. Площа заштрихованої фігури дорівнює різниці площ кіл: 4 − 1 = 3.

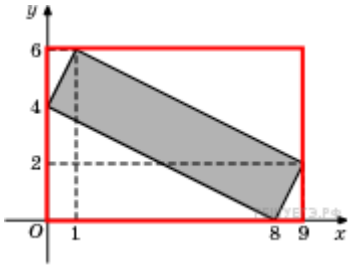
Відповідь: 3**.**

або

Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого мають координати (8; 0), (9; 2), (1; 6), (0; 4).



Розв'язок.



Площа чотирикутника дорівнює різниці площини прямокутника і чотирьох прямокутних трикутників. Тому

$$S = 6 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 20 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 20

<u>6. Початки теорії ймовірностей.</u>

Наукова конференція проводиться за 5 днів. Усього заплановано 75 доповідей — перші три дні по 17 доповідей, решту розподілено порівну між четвертим та п'ятим днями. Порядок доповідей визначається жеребкуванням. Яка ймовірність, що доповідь професора М. виявиться запланованою на останній день конференції?

Розв'язок.

За перші три дні буде прочитано 51 доповідь, на останні два дні планується 24 доповіді. Тож на останній день заплановано 12 доповідей. Отже, ймовірність того, що доповідь професора М. виявиться запланованою на останній день конференції, дорівнює 12/75 = 0,16

Відповідь: 0,16**.**

або

Перед початком футбольного матчу суддя кидає монетку, щоб визначити, яка команда розпочне гру з м'ячем. Команда "Фізик" грає три матчі з різними командами. Знайдіть ймовірність того, що в цих іграх «Фізик» виграє жереб рівно двічі.

Розв'язок.

Позначимо "1" той бік монети, який відповідає за виграш жереба "Фізиком", інший бік монети позначимо "0". Тоді сприятливих комбінацій три: 110, 101, 011, а всього комбінацій 23 = 8: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тим самим шукана ймовірність дорівнює:

Відповідь: 0,375.

<u>7. Найпростіші рівняння.</u>

Знайдіть корінь рівняння: $x = \frac{6x-15}{x-2}$. Якщо рівняння має більше одного кореня, у відповіді вкажіть більший із них.

Розв'язок.

Область допустимих значень: $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$. При х ≠2 помножимо на знаменник:

$$x=\frac{6x-15}{x-2}\Leftrightarrow x(x-2)=6x-15\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5;\\x=3.\end{array}\right.$$

Обидва корені лежать в ОДЗ. Найбільший їх дорівнює 5.

Відповідь: 5.

або

Знайдіть корінь рівняння: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Якщо рівняння має більше одного кореня, вкажіть менший з них.

Розв'язок.

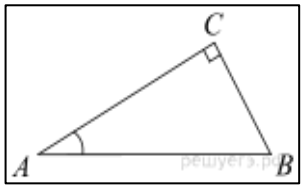
Піднесемо до квадрату:

$$\sqrt{-72-17x}=-x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-72-17x=x^2,\\-x\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+17x+72=0,\\x\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-9,\\x=-8,\end{array}\right.\\x\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-9,\\x=-8.\end{array}\right.$$

Відповідь: −9.

8. Планіметрія: завдання, пов'язані з кутами.

У трикутнику *ABC* кут *C* дорівнює 90°, $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$



***BC* = 5. Знайдіть *AC*.**

Розв'язок.

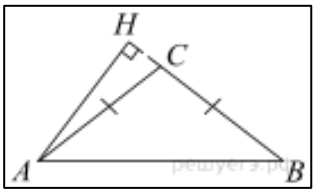
Маємо:

$$AC=\frac{BC}{\operatorname{tg}A}=\frac{BC\cos A}{\sin A}=\frac{BC\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1-\frac{5}{25}}}=5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}}=2{,}5.$$

Відповідь: 2,5.

Або

У трикутнику *ABC* *AC = BC, AB = 10*, висота *AH* дорівнює 3. Знайдіть синус кута *BAC*.



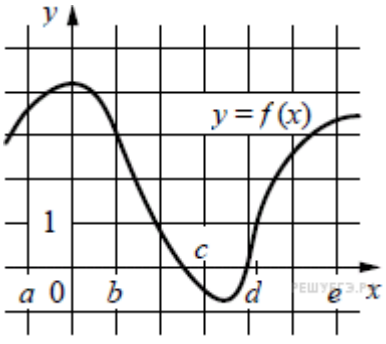
Розв'язок.

Трикутник *ABC* рівнобедрений, отже, кути *BAC* і *ABH* рівні як кути при його основі.

$$\sin\angle BAC=\sin\angle ABH=\frac{AH}{AB}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Відповідь: 0,3.

9. Аналіз графіків і діаграм.



На малюнку зображено графік функції *y = f(x).* Числа *a, b, c, d* і e задають на осі *x* чотири інтервали. Користуючись графіком, поставте у відповідність кожному інтервалу характеристику функції або її похідної .

Нижче вказані значення похідної в даних точках. Користуючись графіком, поставте у відповідність кожній точці значення похідної в ній.

ТОЧКИ	**ЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ АБО ФУНКЦІЇ.**
А) (a; b)	**1) похідна від'ємна на всьому інтервалі**
Б) (b; c)	**2) виробнича додатна на початку інтервалу і**
В) (c; d)	**від'ємна наприкінці інтервалу**
Г) (d; e)	**3) функція від'ємна на початку інтервалу і додатна наприкінці інтервалу**
	4) похідна додатна на всьому інтервалі

Запишіть у відповідь цифри, розташувавши їх у порядку, відповідному літерам:

А	Б	В	Г

Пояснення.

Якщо функція зростає, то похідна додатна і навпаки.

На інтервалі (a;b) похідна додатна спочатку інтервалу і від'ємна в кінці, тому що функція спочатку зростає, а потім спадає.

На інтервалі (b; c) похідна від'ємна, тому що функція спадає.

На інтервалі (c;d) функція від'ємна на початку інтервалу і додатна в кінці інтервалу.

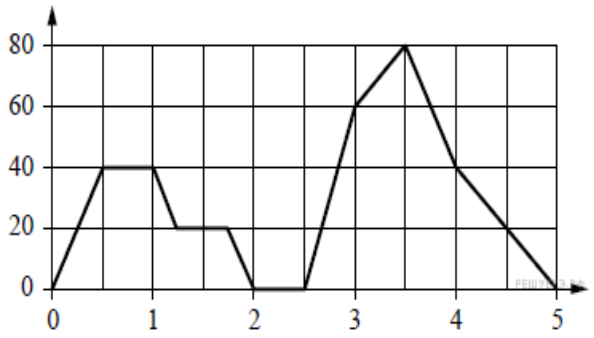
На інтервалі (d; e) похідна додатна, тому що функція зростає.

Таким чином, одержуємо відповідність А - 2, Б - 1, В - 3 і Г - 4.

Відповідь: 2134.

або

На графіку виявлено залежність швидкості руху легкого автомобіля на шляху між двома містами від часу. На вертикальній осі відмічена швидкість в км/год, на горизонтальній — час у годинах, що пройшов з початку руху автомобіля.



Користуючись графіком, поставте у відповідність кожному інтервалу часу характеристику руху на цьому інтервалі.

ІНТЕРВАЛИ ЧАСУ	**ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХУ**
А) другий час шляху	**1) автомобіль не розганявся, і деякий час**
Б) третій час шляху	**їхав з постійною швидкістю**
В) четверта година шляху	**2)швидкість автомобілю постійно**
Г) п'ята година шляху	**знижувалась**
	3) автомобіль зробив зупинку
	4) швидкість автомобілю досягла максимуму за весь час руху

Запишіть у відповідь цифри, розташувавши їх у порядку, відповідному літерам:

А	Б	В	Г

Пояснення.

Протягом другої години шляху автомобіль не розганявся і деякий час їхав з постійною швидкістю.

Протягом третьої години шляху автомобіль зупинився, а потім продовжив рух.

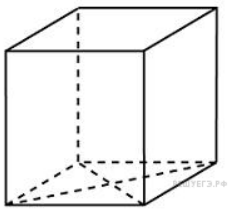
Протягом четвертої години шляху автомобіль набрав максимальну швидкість.

Протягом п'ятої години шляху швидкість автомобіля падала.

Таким чином, одержуємо відповідність: А - 1, Б - 3, В - 4 і Г - 2.

Відповідь: 1342.

10. Стереометрія..



В основі прямої призми лежить ромб з діагоналями, рівними 6 і 8. Площа її поверхні дорівнює 248. Знайдіть бічне ребро цієї призми.

Розв'язок.

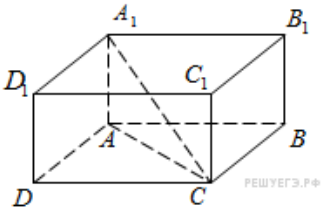
Сторона ромба виражається через його діагоналі d_1 і d_2 як

$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5$. Площа ромба $S_P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 24$.

Тоді бічне ребро знайдемо з виразу для площі поверхні:

$$S = 2S_{\text{ромба}} + 4aH \Leftrightarrow H = \frac{S - 2S_{\text{ромба}}}{4a} = \frac{248 - 48}{20} = 10$$

Відповідь: 10.



або

У прямокутному паралеліпіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $DD_1=1$, $CD=2$, $AD=2$. Знайдіть довжину діагоналі CA_1

Розв'язок.

Знайдемо діагональ AC прямокутника $ABCD$. За теорією Піфагора $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{8}$.

Розглянемо прямокутний трикутник A_1AC. За теорією Піфагора

$CA_1 = \sqrt{CA^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{8+1} = 3$.

Відповідь: 3.

11. Вибір оптимального варіанту

Для транспортування 45 тон вантажу на 1300 км. можна скористатися послугами однієї з трьох фірм-перевізників. Вартість перевезення та вантажопідйомність автомобілів для кожного перевізника вказана у таблиці. Скільки рублів доведеться заплатити за найдешевше перевезення?

Перевізник	Вартість перевезення одним автомобілем (руб. на 100 км)	Вантажопідйомність автомобілів (тон)

А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Розв'язок.

Розглянемо усі варіанти.

Для перевезення 45 тон вантажу перевізнику А знадобиться 13 автомобілів. Вартість перевезення кожним з них складе 32 . 1300 = 41 600 руб. Повна вартість перевезення 41600 . 13 = 540 800 руб.

Для перевезення 45 тон вантажу перевізнику Б знадобиться 9 автомобілів. Вартість перевезення кожним із них складе 41 . 1300 = 53 300 руб. Повна вартість перевезення 53300 . 9 = 479 700 руб.

Для перевезення 45 тон вантажу перевізнику знадобиться 4 автомобілі. Вартість перевезення кожним із них складе 95 . 1300 = 123 500 руб. Повна вартість перевезення 123500 . 4 = 494 000 руб.

Вартість найдешевшого перевезення становитиме 479 700 руб.

Відповідь: 479 700.

або

У таблиці вказані середні ціни (у рублях) на деякі основні продукти харчування у трьох містах Росії (за даними початку 2010 року).

Найменування продукту	**Тверь**	**Липецьк**	**Барнаул**
Пшеничный хліб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картопля(1 кг)	9	13	16
Сир (1 кг)	240	215	260
М'ясо (яловичина) (1 кг)	260	280	300
Соняшникова олія (1 літр)	38	44	50

Визначте, в якому з цих міст виявиться найдешевшим наступний набір продуктів: 2 батони пшеничного хліба, 3 кг картоплі, 1,5 кг яловичини, 1 л соняшникової олії. У відповідь запишіть вартість цього набору продуктів у цьому місті (у рублях).

У Твері вартість 2 батонів пшеничного хліба, 3 кг картоплі, 1,5 кг яловичини, 1 л соняшникової олії становитиме 112+93+1,5260+138=477 руб.

У Липецьку вартість 2 батонів пшеничного хліба, 3 кг картоплі, 1,5 кг яловичини, 1 л соняшникової олії становитиме 12 2 + 13 3 + 1,5 280 + 1 44 = 527 руб.

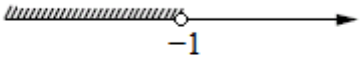
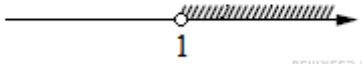
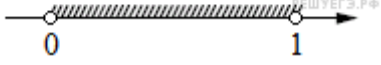
У Барнаулі вартість 2 батонів пшеничного хліба, 3 кг картоплі, 1,5 кг яловичини, 1 л соняшникової олії становитиме 14 2 + 16 3 + 1,5 300 + 1 50 = 576 руб.

Найдешевший набір продуктів можна купити у Твері за ціною 477 руб.

Відповідь: 477

<u>12. Найпростіші нерівності</u>

Кожній з чотирьох нерівностей в лівому стовпчику відповідає один з розв'язків в правій колонці. Установіть відповідність між нерівностями та їх розв'язками.

НЕРІВНОСТІ	РОЗВ'ЯЗКИ
А) $\log_2 x > 0$	1) 
Б) $2^{-x} > 2$	2) 
В) $\frac{x}{x-1} < 0$	3) 
Г) $\frac{1}{x(x-1)} > 0$	4) 

Запишіть у відповідь цифри, розташувавши їх в порядку, відповідному буквам:

А	Б	В	Г

Розв'язок.

Розв'яжемо нерівності:

А) $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 1 \Leftrightarrow x > 1$

Б) $2^{-x} > 2 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^1 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

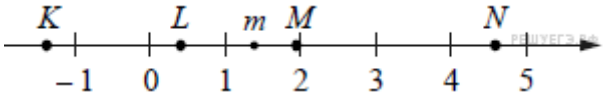
В) $\frac{x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Г) $\frac{1}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 1. \end{array}\right.$

Відповідь: 3241.

Або

На прямій відмічено число *m* і точки *K, L, M і N.*



ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) ***K***	***1) 6 – m***
Б) ***L***	***2) m^2***
В) ***M***	***3) m – 1***
Г) ***N***	***4)*** $-\frac{2}{m}$

Запишіть у відповідь цифри, розташувавши їх в порядку, відповідному буквам:

А	Б	В	Г

Розв'язок.

Зауважимо, що $1 < m < 2,$ отже, $4 < 6 - m < 5,\ 1 < m^2 < 4,\ 0 < m - 1 < 1,\ -2 < -\frac{2}{m} < -1.$

Відповідь: 4321.

Не забудьте перенести всі відповіді в бланк відповідей № 1

ЧАСТИНА 2

Відповіддю на завдання 13-16 повинно бути ціле число або скінченний десятковий дріб. Відповідь слід записати в бланк відповідей № 1 праворуч від номера завдання, що виконується, починаючи з першої клітинки. Кожну цифру, знак мінус та кому пишіть в окремій клітинці відповідно за наведеними в бланку зразками. Одиниці вимірювань писати не потрібно.

13. Обчислення і перетворення

Знайдіть $61a-11b+50$, **якщо** $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$

Розв'язок.

Виконаємо перетворення:

$$\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9 \Rightarrow 2a-7b+5=63a-18b+45 \Rightarrow 61a-11b+40=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 61a-11b+50=10$$

Відповідь: 10

або

Знайдіть значення виразу $\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}$

Розв'язок.

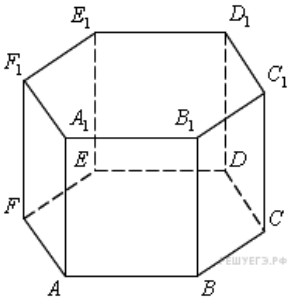
Виконаємо перетворення:

$$\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\sqrt{91}+7}{10+\sqrt{91}}=\frac{20+2\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2(10+\sqrt{91})}{10+\sqrt{91}}=2$$

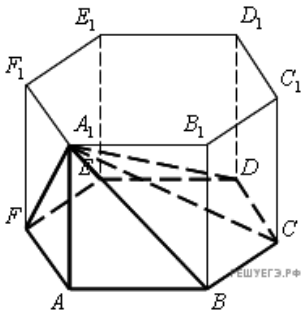
Відповідь:2.

14. Стереометрія.

Знайдіть об'єм багатогранника, вершинами якого є точки A, B, C, D, E, F, A_1 **правильної шестикутної призми** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ **площа основи якої дорівнює 4, а бічне ребро дорівнює 3.**



Розв'язок.

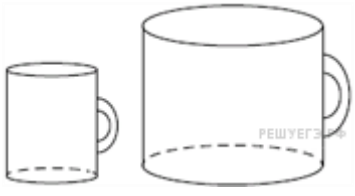


Основа піраміди така сама, як основа правильної шестикутної призми, і висота в них спільна. Тому $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3=4.$

Відповідь: 4.

або

Дано два кухолі циліндричної форми. Перший кухоль у півтора рази нижчий за другий, а другий вдвічі ширший за перший. У скільки разів об'єм другого кухоля більше об'єму першого?



Розв'язок.

Об’єм циліндра обчислюється за формулою $V = \pi r^2 h.$ Об’єм першого кухолю дорівнює$V_1 = \pi r_1^2 h_1,$

об’єм другого кухолю дорівнює $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi (2r_1)^2 \frac{3}{2} h_1 = 6\pi r_1^2 h_1 = 6V_1.$

Отже, об’єм другого кухолю в шість разів більше об’єму першого.

Відповідь: 6.

15. Найбільше і найменше значення функції.

Знайдіть найменше значення функції $y = 4\,\mathrm{tg}x - 4x - \pi + 5$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Розв’язок.

Знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 4\,\mathrm{tg}^2 x.$$

Знайдена похідна невід'ємна на заданому відрізку, задана функція зростає на ньому, тому найменшим значенням функції на відрізку є

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi + 5 = 1.$$

Відповідь: 1.

Або

Знайдіть точку мінімуму функції $y = 3x - \ln(x+3)^3$.

Розв’язок.

Зауважимо, що $y = 3x - 3\ln(x+3).$

Область визначення функції – відкритий промінь $(-3; +\infty).$

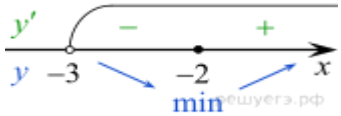
Знайдемо похідну заданої функції: $y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$

Знайдемо нулі похідної:

$$3 - \frac{3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Знайдена точка лежить на промені $(-3; +\infty).$

Визначимо знаки похідної функції і зобразимо на рисунку поведінку функції:



Шукана точка мінімуму $x = -2.$

Відповідь: −2.

16. Ймовірність складних подій.

У магазині стоять два платіжні автомати. Кожен може бути несправний з ймовірністю 0,05 незалежно від іншого автомата. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один автомат справний.

Розв’язок.

1) Автомати працюють незалежно один від одного. Можливість несправності кожного становить 0,05.
Знайдемо ймовірність того, що зламаються обидва пристрої відразу:
Р(обидва несправні) = 0,05 · 0,05 = 0,0025.
2) Подія «хоч один автомат справний» протилежно події «обидва несправні». Сума їх ймовірностей завжди дорівнює 1. Обчислимо шукану ймовірність: Р (хоча б один справний) = 1-0,0025 = 0,9975.
Відповідь: 0,9975.

Або

У ящику чотири сині та шість зелених фломастерів. Фломастери витягують по черзі у випадковому порядку. Яка ймовірність того, що вперше зелений фломастер з'явиться третім?

Розв'язок.

1) Щоб зелений фломастер вперше з'явився третім, перші два видобуті фломастери повинні бути синіми, а третій — зеленим. Комбінація, що шукається: Синій - Синій - Зелений.
2) Імовірність першого синього фломастеру.
Спочатку в ящику 4 синіх та 6 зелених фломастерів, всього – 10 штук.
Імовірність дістати перший синій фломастер складає: $P_1 = \frac{4}{10}$
3) Імовірність другого синього фломастеру.
Після першого кроку в ящику залишається 9 фломастерів, у тому числі 3 синіх.
Імовірність дістати ще один синій фломастер дорівнює: $P_2 = \frac{3}{9}$
4) Імовірність третього зеленого фломастеру
Тепер у ящику залишилося 8 фломастерів і всі 6 зелених фломастерів все ще всередині. Імовірність дістати зелений фломастер складає: $P_3 = \frac{6}{8}$
5) Розрахунок загальної ймовірності.
Так як події відбуваються послідовно одна за одною, їх ймовірності необхідно перемножити:
$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}1$
Отже, ймовірність того, що перший зелений фломастер з'явиться третім, становить 0,1.
Відповідь: 0,1.

Не забудьте перенести всі відповіді в бланк відповідей № 1

Для запису розв'язків і відповідей на завдання 17-21 використовуйте БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ №2. Запишіть спочатку номер завдання, що виконується, (17,18 і т.д.), а потім повний обґрунтований розв'язок і відповідь. Відповіді записуйте чітко і розбірливо.

17. Рівняння, системи рівнянь

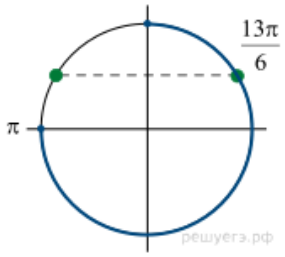
а) Розв'яжіть рівняння $4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

б) Знайдіть всі корені цього рівняння, що належать відрізку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Розв'язок.

а) Запишемо рівняння у вигляді

$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$



Отже, або $\sin x=-\frac{3}{2}$ — рівняння не має коренів, або $\sin x=\frac{1}{2}$, звідки $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) За допомогою числового кола відберемо корені рівняння, що належать відрізку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.Отримаємо число $\frac{13\pi}{6}$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{6}$.

або

а) Розв'яжіть рівняння $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$

б) Вкажіть всі корені цього рівняння, що належать відрізку $[\log_3 4;\log_3 10]$.

Розв'язок.

а) Розкладемо ліву частину на множники:

$27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0 \Leftrightarrow 27^x-5\cdot 9^x-9\cdot 3^x+45=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9^x(3^x-5)-9(3^x-5)=0 \Leftrightarrow (3^x-5)(9^x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=5,\\9^x=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 5,\\x=1.\end{array}\right.$$

Б) Оскільки $1<\log_3 4<\log_3 5<\log_3 10,$ відрізку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$ належить тільки корінь $\log_3 5$.

Відповідь: а) $\{1;\ \log_3 5\}$, б) $\log_3 5$.

Примітка.

Можна було ввести заміну $t=3^x$, отримати рівняння та розв'язати його розкладанням на множники:

$$t^3-5t^2-9t+45=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=5,\\t=\pm 3.\end{array}\right.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо рішення.

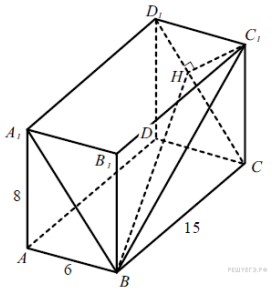
18. Кути і відстані в просторі

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між площиною A_1BC і прямою BC_1, якщо $AA_1=8, AB=6, BC=15$.

Радіус основи конуса дорівнює 6, а висота конуса дорівнює 8. У конусі проведено переріз площиною, що проходить через вершину конуса і хорду

основи, довжина якої дорівнює 4. Знайдіть кут між площиною основи і площиною перерізу.

Розв'язок.



Переріз площиною A_1BC є прямокутник A_1BCD_1

З точки C_1 проведемо перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекція BC_1 на площину A_1BC. Отже, потрібно знайти кут C_1BH .У прямокутному трикутнику D_1C_1C знаходимо: $C_1H = \dfrac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \dfrac{24}{5}$.

У прямокутному трикутнику BCC_1 знаходимо: $BC_1 = 17$. У прямокутному трикутнику C_1HB знаходимо:

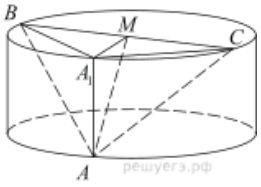
$$\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}.$$

Відповідь: $\arcsin\dfrac{24}{85}$.

або

Висота циліндра дорівнює 5. Рівнобедрений трикутник ABC з бічною стороною 14 і ∠A = 120° розташований так, що його вершина A лежить на колі нижньої основи циліндра, а вершини B і C — на колі верхньої основи. Знайдіть кут між площиною ABC та площиною основи циліндра.

Розв'язок.



Нехай AA_1 твірна— циліндра, M — середина хорди BC. Тоді AM=AB·cos 60° = 7.Трикутники ABA_1 і ACA_1 рівні за гіпотенузою та катетом. Отже, $BA_1 = A_1C$. У рівнобічних трикутниках BAC и BA_1C медіани AM и A_1M є висотами. Тому кут між площинами дорівнює куту $\angle AMA_1$. У прямокутному трикутнику AMA_1 маємо:

$\sin \angle AMA_1 = \dfrac{AA1}{AM} = \dfrac{5}{7}$, $\angle AMA_1 = \arcsin\dfrac{5}{7}$.

Відповідь: : $\arcsin\dfrac{5}{7}$.

<u>19. Нерівності, системи нерівностей.</u>

Розв'яжіть нерівність: $\dfrac{320 - 4^{-x-1}}{128 - 2^{-x}} \geq 2{,}5.$

Розв'язок.

Зробимо заміну $y = 2^{-x}$.

$$\frac{320 - 0{,}25y^2}{128 - y} \geq 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{-0{,}25y^2 + 2{,}5y}{128 - y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{0{,}25y(y-10)}{128 - y} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 10 \\ y > 128. \end{array}\right.$$

Тому $0 \leq 2^{-x} \leq 10$ або $2^{-x} > 128$, звідки знаходимо множину розв'язків нерівності: $(-\infty, -7) \cup [-\log_2 10, +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty, -7) \cup [-\log_2 10, +\infty)$.

або

Розв'яжіть нерівність $\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \dfrac{x+2}{x-2} > 2.$

Розв'язок.

Область визначення з двох проміжків: або $x>2$, або $x<-2$. На кожному з них логарифм частки можно представити у вигляді різниці логарифмов.

Якщо $x>2$, то:

$$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)-3\log_2(x+2)+3\log_2(x-2)>2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)-2\log_2(x-2)<-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(x+2)<\log_2(x-2)^2 \Leftrightarrow 2x+4<(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-6x>0 \Leftrightarrow x(x-6)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>6. \end{array}\right.$$

Враховуючи, що $x>2$, отримаєм: $x>6$.

Якщо $x<-2$, то:

$$\log_2(-x-2)+\log_2(-x+2)-3\log_2(-x-2)+3\log_2(-x+2)>2 \Leftrightarrow \log_2(-x-2)-2\log_2(2-x)<-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(-x-2)<\log_2(2-x)^2 \Leftrightarrow -2x-4<(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+8>0.$$

Отримана нерівність виконується для усіх x.

Таким чином, розв'язок даної нерівності: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

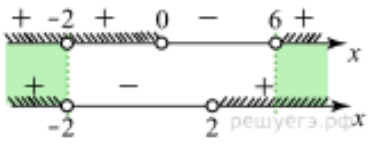
Наведемо інше рішення

Внесемо 3 під знак логарифму та скористуємось формулою різниці логарифмів

$$\log_2(x^2-4)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}>2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-4)-\log_2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3>2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_2\dfrac{(x-2)^4(x+2)}{(x+2)^3}>2, \\ x^2-4>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)^4}{(x+2)^2}>4, \\ x^2-4>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)^4-4(x+2)^2}{(x+2)^2}>0, \\ x^2-4>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x^2-6x)(x^2-2x+8)}{(x+2)^2}>0, \\ x^2-4>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>6 \end{array}\right.$$



Відповідь: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

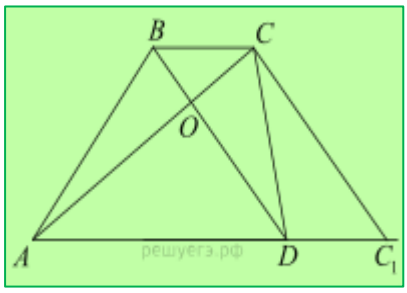
20. Планіметричні задачі

Дана трапеція з діагоналями рівними 8 і 15. Сума основ дорівнює 17.

а) Доведіть, що діагоналі перпендикулярні.

б) Знайдіть площу трапеції.

Розв'язок.



а) Проведемо через точку C пряму паралельну BD. На перетині цієї прямої і прямої AD позначимо точку C_1, BCC_1D - паралелограм.

У трикутнику ACC_1: $AC=15$, $CC_1=BD=8$, $AC_1=AD+DC_1=17$. Зауважимо, що $AC^2+CC_1^2=AC_1^2$ оскільки $289=225+64$, тоді за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ACC_1 - прямокутний, кут ACC_1 прямий. Тоді кут COD прямий, що й треба було довести.

б) $$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15=60.$$

Відповідь: б) 60.

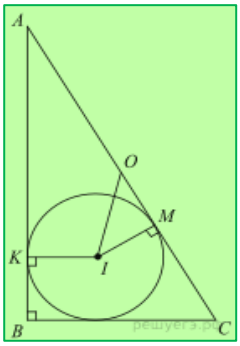
або

У трикутник *ABC* вписано коло радіуса *R*, що дотикається до сторони *AC* в точці *M*, причому *AM = 5R* і *CM = 1,5R*.

а) Доведіть, що трикутник *ABC* прямокутний.

б) Знайдіть відстань між центрами його вписаного і описаного кіл, якщо відомо, що *R* = 4.

Розв'язок.



а) Нехай вписане коло дотикається до сторони *AB* в точці *K*. Позначимо *BK* = *x*. Нехай *S* – площа трикутника, *p* – півпериметр. Тоді

$$p = 5R + 1{,}5R + x = 6{,}5R + x, \qquad S = pR = R(6{,}5R + x).$$

З іншого боку, за формулою Герона

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(6{,}5R+x)\cdot 5R\cdot 1{,}5R\cdot x} = R\sqrt{7{,}5x(6{,}5R+x)}.$$

З рівняння $R(6{,}5R+x) = R\sqrt{7{,}5x(6{,}5R+x)}$

отримаємо, що *R* = *x*. Сторони трикутника *ABC* рівні *6,5R, 6R* і *2,5R,* отже, цей трикутник прямокутний з прямим кутом при вершині *B*.

б) Нехай *I* і *O* - центри відповідно вписаного і описаного кіл трикутника *ABC*. Точка *O* - середина гіпотенузи $AC = 6{,}5R = 26$, і $OM = CO - CM = 13 - 1{,}5R = 7$. Тоді

$$IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}.$$

Відповідь: б) $\sqrt{65}$

21. Рівняння, нерівності та їх системи з параметрами

Знайдіть всі значення параметра а, при кожному з яких рівняння $\frac{5a}{a-3}\cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$ має рівно два різні корені.

Розв'язок.

Нехай $7^{|x|} = t$, $t \geq 1$. Якщо $t > 1$,тоді $|x| = \log_7 t \Leftrightarrow x = \pm \log_7 t$ — два корені. Якщо $t = 1$, тоді $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — єдиний корень.

Позначимо $f(t) = t^2 - \frac{5a}{a-3}\cdot t + \frac{6a+7}{a-3}$

Вихідне рівняння має рівно два корені тоді і лише тоді, коли рівняння $f(t) = 0$ має рівно один корінь більший 1.

Рівняння $t^2 - \frac{5a}{a-3}\cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0$ має рівно один корінь, якщо дискримінант дорівнює нулю:

$$\left(\frac{5a}{a-3}\right)^2 - 4\cdot\frac{6a+7}{a-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+44a+84}{(a-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = -42. \end{array}\right.$$

Якщо $a = -2$ рівняння $t^2 - 2t + 1 = 0$ має єдиний корінь $t = 1$. В цьому випадку вихідне рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $a = -42$ рівняння $t^2 - \frac{14}{3}\cdot t + \frac{49}{9} = 0$ має єдиний корінь $t = \frac{7}{3}$. В цьому випадку рівняння має два кореня.

Графіком функції $f(t)$ є парабола, вітки якої спрямовані вгору. Для того, щоб рівняння $f(t) = 0$ мало два корені, один з яких більший за 1, а інший менший за 1, необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5a}{a-3} + \frac{6a+7}{a-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2a+4}{a-3} < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 3.$$

Відповідь: $a=-42,\ -2<a<3.$

або

Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язок.

Рішення системи може бути єдиним у двох випадках.

1випадок. Єдине рішення є граничною точкою для безлічі рішень кожної з двох нерівностей. У цьому випадку це єдине рішення має задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$$

Віднімаючи з другого рівняння перше, отримуємо

$$x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Якщо $x=1$, тоді $a+2(a+1)+a+1=0$, отже, $a=-\frac{3}{4}$. При цьому значенні a система набуває вигляду:

$$\begin{cases}-7x^2-6x+13\le 0,\\ -3x^2+2x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -\frac{13}{7},\\ x\ge 1.\end{array}\right.,\\ -\frac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Єдине рішення $x=1$.

Якщо $x=-3$, тоді $9a-6(a+1)+a+1=0$ і $a=-\frac{5}{4}$. Система набуває вигляду:

$$\begin{cases}x^2+10x+21\le 0,\\ 5x^2+18x+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\le x\le -3,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -3,\\ x\ge -\frac{3}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -7\le x\le -3.$$

При цьому значенні a система має безліч рішень.

2 випадок. Одна з нерівностей має єдине рішення, що задовольняє іншу нерівність.

Перша нерівність має єдине рішення при

$$\begin{cases}a^2-(a-1)(a+4)=0,\\ a-1>0.\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

При цьому перша нерівність має єдине рішення $x=-4$ яке задовольняє другу нерівність.

Друга нерівність має єдине рішення при

$$\begin{cases} (a+1)^2 - a(a+1) = 0, \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

При цьому друга нерівність має єдине рішення $x = 0$, яке не задовольняє першу нерівність .

Відповідь: $-\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$.